



Lösungswege

Mathematik Oberstufe

6

Philipp Freiler
Julia Marsik
Markus Olf
Markus Wittberger

3. Semester

Terme, Gleichungen und Ungleichungen

1	Potenzen	6
	1.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten	7
	1.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	9
	1.3 Potenzen mit rationalen Exponenten	15
	1.4 Potenzen mit reellen Exponenten	18
	Vernetzung – Typ-2-Aufgaben	19
	Selbstkontrolle	20
	Kompetenzcheck Terme, Gleichungen und Ungleichungen 1	21
2	Logarithmus und Exponentialgleichungen	22
	2.1 Logarithmus	23
	2.2 Exponentialgleichungen	27
	Vernetzung – Typ-2-Aufgaben	30
	Selbstkontrolle	31
3	Ungleichungen	32
	3.1 Lineare Ungleichungen	33
	3.2 Ungleichungen mit Fallunterscheidungen	38
	Vernetzung – Typ-2-Aufgaben	41
	Selbstkontrolle	42
	Kompetenzcheck Terme, Gleichungen und Ungleichungen 2	43

Funktionen

4	Untersuchen reeller Funktionen	44
	4.1 Monotonie und Extremstellen von Funktionen	45
	4.2 Symmetrie und Periodizität	51
	4.3 Bijektive Funktionen und Umkehrfunktionen	54
	4.4 Verkettungen von Funktionen	56
	4.5 Verallgemeinern des Funktionsbegriffs	57
	4.6 Änderungsmaße	60
	Vernetzung – Typ-2-Aufgaben	63
	Selbstkontrolle	64
5	Potenzfunktionen und Polynomfunktionen	66
	5.1 Potenzfunktionen	67
	5.2 Polynomfunktionen	74
	Vernetzung – Typ-2-Aufgaben	77
	Selbstkontrolle	78
	Kompetenzcheck Funktionen 1	80
6	Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen	82
	6.1 Graph und Eigenschaften der Exponentialfunktion	83
	6.2 Wachstums- und Abnahmeprozesse modellieren	90
	6.3 Logarithmusfunktionen	97
	Vernetzung – Typ-2-Aufgaben	99
	Selbstkontrolle	100
7	Winkelfunktionen	102
	7.1 Das Bogenmaß	103
	7.2 Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion	105
	7.3 Harmonische Schwingungen	110
	Vernetzung – Typ-2-Aufgaben	115
	Selbstkontrolle	116
	Kompetenzcheck Funktionen 2	118

Folgen und Reihen

8	Folgen	120
	8.1 Zahlenfolgen und ihre Darstellung	121
	8.2 Monotonie und Grenzwert	125
	8.3 Arithmetische Zahlenfolgen	130
	8.4 Geometrische Zahlenfolgen	133
	Vernetzung – Typ-2-Aufgaben	136
	Selbstkontrolle	137

1.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten

KOMPETENZEN

Lernziele:

- Die Deutung einer Potenz mit natürlichem Exponenten ($\neq 0$) als wiederholte Multiplikation kennen
- Die Rechenregeln für Potenzen kennen und anwenden können
- Das Pascal'sche Dreieck kennen

Grundkompetenz für die schriftliche Reifeprüfung:

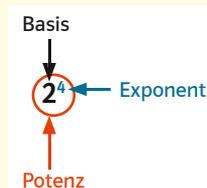
AG-R 1.2 Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit

VORWISSEN

MERKE

Potenzen mit natürlichen Exponenten

Eine Potenz mit einem natürlichen Exponenten (einer natürlichen Hochzahl) stellt die wiederholte Multiplikation ein und desselben Faktors dar. Dabei gibt der Exponent an, wie oft der Faktor auftritt. Allgemein gilt für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n Faktoren)
 $a^1 = a$ (Produkt mit einem Faktor)



1. Gib in Potenzschreibweise bzw. als wiederholte Multiplikation an.

- a) $e \cdot e \cdot e \cdot e \cdot e \cdot e$ c) $(a + b) \cdot (a + b)$ e) 10^6 g) $(x - y)^4$
 b) $v \cdot v \cdot v \cdot v$ d) $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot a \cdot a$ f) x^5 h) $(a + b)^2 \cdot (a - b)^3$

2. Berechne den Wert der Potenz. a) $(-3)^4$ b) $(-3)^3$ c) -3^4

- a) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 3^4 = 81$ c) $-3^4 = (-1) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$
 b) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -3^3 = -27$ -1 wird nicht potenziert!

3. Berechne den Wert der Potenz.

- a) $(-2)^3$ b) $(-2)^4$ c) -2^6 d) $(-2)^8$ e) $(-2)^5$ f) -2^7

AG-R 1.2 M

4. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

- A $-2^4 \neq (-2)^4$ B $-2^4 = (-2)^4$ C $(-2)^3 \neq -2^3$ D $(-1)^3 = -1^3$ E $(-1)^9 = (-1)^{10}$

5. Begründe: für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

- a) $(-a)^n = a^n$, wenn n gerade b) $(-a)^n = -a^n$, wenn n ungerade

Rechenregeln für Potenzen mit natürlichen Exponenten

Für das Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren von Potenzen mit gleichen Basen (Grundzahlen) können Rechenregeln aufgestellt werden.

Für die Multiplikation gilt: $a^4 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7$ (4 + 3 Faktoren)

Für die Division gilt: $a^5 : a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^3$

Nach dem Kürzen bleiben $5 - 2 = 3$ Faktoren übrig.

Das Potenzieren ist ein wiederholtes Multiplizieren derselben Potenz.

Es gilt: $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^{3 \cdot 2} = a^6$

Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen

In einer linearen Ungleichung mit zwei Variablen werden die zwei Unbekannten meist mit x und y bezeichnet, z. B. $y + 3 \leq x$.

MUSTER

163. Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $y + 3 \leq x$ und stelle sie graphisch dar.

Die Lösungsmenge besteht nicht nur aus einzelnen Zahlen, sondern aus Zahlenpaaren $(x | y)$. $(12 | 3)$ ist beispielsweise eine Lösung der Ungleichung $y + 3 \leq x$, da gilt:

$$3 + 3 \leq 12$$

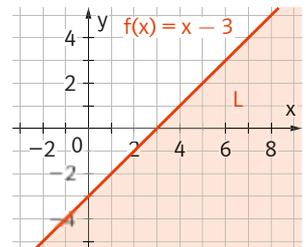
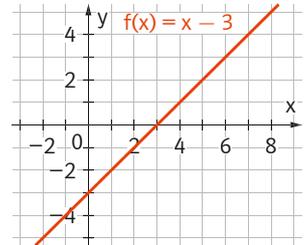
$$6 \leq 12 \quad \text{wahre Aussage}$$

Forme die Ungleichung nach y um: $y + 3 \leq x \quad | -3$
 $y \leq x - 3$

Die Lösungsmenge L besteht aus allen Zahlenpaaren, die diese Bedingung erfüllen: $L = \{(x | y) | y \leq x - 3 \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$

Für die graphische Darstellung von L deutet man die rechte Seite der Ungleichung als Funktion $f(x) = x - 3$ und zeichnet die Gerade in ein Koordinatensystem.

Alle Punkte mit $y \leq x - 3$, d. h. alle Punkte, die unterhalb oder auf der Geraden liegen, stellen die Lösungsmenge L dar.



164. Stelle die Lösungsmenge der Ungleichung graphisch dar.

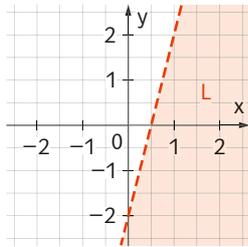
- a) $x + 2y > 4$ b) $-x < 4 - y$ c) $x + y > 0$ d) $4x - 6y < 12$

AG-R 2.4

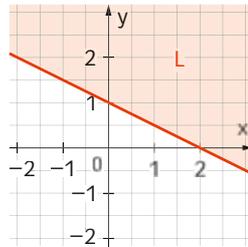
M

165. Ordne der dargestellten Lösung die lineare Ungleichung mit zwei Variablen zu.

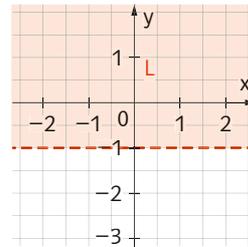
1



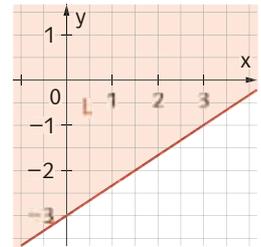
2



3



4



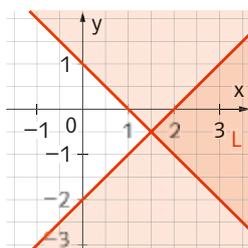
- A: $y > 4x - 2$ B: $y < 4x - 2$ C: $y \geq \frac{2}{3}x - 3$ D: $y > \frac{2}{3}x - 3$ E: $y > -1$ F: $y \geq -0,5x + 1$

166. Stelle die Schnittmenge der beiden Lösungsmengen der Ungleichungen graphisch dar.

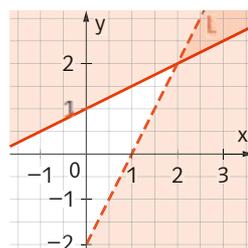
- a) $x - 2y > 2 \wedge x + 3y > 6$ b) $-2x < 4 - y \wedge x - 3y > 0$ c) $2x - 3y > 6 \wedge x + y < 3$

167. Gib das zur Lösungsmenge passende System zweier linearer Ungleichungen an.

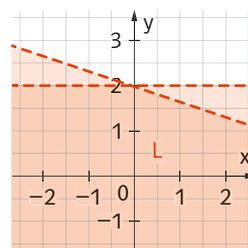
a)



b)



c)



d)

